

Berufsfeldbezug in den fachwissenschaftlichen Studienanteilen des Lehramtsstudiums Mathematik – Problemaufriss und Initiativen

Matthias Mohr, Markus Heydenreich, Georg Schollmeyer, Stefan Ufer

Die Frage nach dem Verhältnis zwischen fachmathematischer Ausbildung im Lehramtstudium und der Tätigkeit als Mathematiklehrkraft im Berufsfeld beschäftigt nicht nur die Mathematik und die Mathematikdidaktik seit langem, sondern auch viele Lehramtsstudierende. Entsprechend stellt sich die Frage, an welchen Stellen Berufsfeldbezüge in die fachmathematischen Studienanteile des Lehramtstudiums integriert und wie diese im Rahmen von Veranstaltungen umgesetzt werden können. Basierend auf einer Zusammenfassung des Entwicklungs- und Forschungsstands zum Thema wird ein Rahmenmodell für die Konzeption berufsfeldbezogener Lerngelegenheiten in fachmathematischen Veranstaltungen des Lehramtstudiums vorgeschlagen und anhand von Projekten der „Qualitätsoffensive Lehrerbildung“ an der LMU illustriert.

Ein nicht unerheblicher zeitlicher Anteil des Hochschulstudiums vieler angehender Mathematiklehrkräfte – vor allem für Schularten der Sekundarstufe und besonders für das Lehramt an Gymnasien – entfällt auf Veranstaltungen zur Fachwissenschaft Mathematik. Damit ist die Frage, die bereits Felix Klein (1908) für die Mathematiklehrkräftebildung gestellt hat, nach wie vor von Bedeutung: Wie muss ein fachwissenschaftliches Studium für angehende Mathematiklehrkräfte gestaltet sein, damit es diese auf ihre spätere berufliche Praxis vorbereitet? Dass fachliche Studienanteile für die Mathematiklehrkräftebildung – über fachdidaktische Anteile hinaus – zwingend notwendig sind, ist nicht unumstritten. So interpretieren beispielsweise Autor:innen aus der COACTIV-Gruppe einige ihrer Ergebnisse dahingehend, dass vor allem fachdidaktisches Wissen mit einer lernwirksamen Unterrichtsgestaltung einhergeht (vgl. Baumert et al. 2010). Fachliches Wissen – in der COACTIV-Studie als vertieftes Wissen von Schulmathematik operationalisiert – sehen sie als eine mögliche Ressource beim Erwerb fachdidaktischen Wissens. Sie argumentieren aber auch, dass es alternative Wege zum fachdidaktischen Wissen – ohne den Erwerb vertiefter fachwissenschaftlicher Kenntnisse – geben müsse (vgl. Brunner et al. 2006). Unabhängig von diesen empirischen Resultaten gelten fachwissenschaftliche

Kenntnisse von Mathematiklehrkräften aus normativer Sicht in unserer Gesellschaft als wünschenswert. So sehen die inhaltlichen Anforderungen für die Lehrkräftebildung im Fach Mathematik eine substanzielle Bandbreite mathematischer Inhalte und Arbeitsweisen als Ziele der Lehrkräftebildung vor (vgl. KMK 2008).

Auf der anderen Seite gibt es immer wieder Zweifel daran, dass das aktuelle fachwissenschaftliche Studium die erwarteten positiven Wirkungen in der professionellen Praxis von Lehrkräften tatsächlich entfaltet (vgl. Wasserman et al. 2017; Zazkis & Leikin 2010). Dafür kann es unterschiedliche Gründe geben: Zunächst könnte es (1) sein, dass die in den fachmathematischen Lehrveranstaltungen behandelten mathematischen Inhalte zwar prinzipiell direkt für den Lehrberuf hilfreich sind, aber nicht von allen Studierenden bis zu einem Niveau erworben werden, das für eine wirksame weitere Nutzung ausreichend ist. Beispielsweise zeigen Lehramtsstudierende (bei großen Überlappungen der Verteilungen) im Mittel geringeres Vorwissen zu Beginn des Studiums als Studierende der Fachmathematik (vgl. Rach 2019), was den weiteren Wissenserwerb beeinträchtigen kann. Alternativ werden motivationale Ursachen angenommen, z.B. weil Lehramtsstudierende bezüglich der fachlichen Inhalte zu gering ausgeprägte Wertüberzeugungen zeigen, um tiefe Lernprozesse anzuregen (vgl. Neuhaus & Rach 2021), oder weil sie andere Ziele (z.B. Vorbereitung auf einen konkreten Beruf vs. Einführung in eine wissenschaftliche mathematische Theorie) mit dem Besuch der fachlichen Lehrveranstaltungen verknüpfen als andere Studierende (vgl. Wasserman et al. 2018). Sofern Lehramtsstudierende die fachlichen Inhalte tatsächlich zu einem ausreichenden Niveau erlernen, bleibt die Frage (2), ob diese Inhalte überhaupt geeignet und relevant sind, um fachliche Anforderungen im Berufsfeld zu bewältigen – ob es also ausreichende Beziehungen zwischen der Hochschulmathematik und der Schulmathematik gibt, die eine Anwendung des Wissens ermöglichen. Vielfältige Arbeiten haben in der Vergangenheit aufgezeigt, dass solche Bezüge zumindest punktuell sehr wohl vorstellbar sind (vgl. Bauer 2013; Bauer & Hefendehl-Hebeker 2019; Isaev et al. 2022b; Schadl et al. 2019; Weber & Lindmeier 2022). Doch selbst wenn fachliche Inhalte erworben wurden und diese prinzipiell Bezüge zur Schulmathematik aufweisen, ist damit (3) noch nicht gewährleistet, dass diese Inhalte in der Berufspraxis angewendet werden können. Es kann eben sein, dass professionsbezogene Anforderungen des Lehrberufs anders strukturiertes Wissen erfordern als die Anforderungen, anhand derer fachliche Inhalte der Universität erlernt werden. Vor diesem Hintergrund stellt sich die Frage, wie die Beziehung zwischen Schul- und Hochschulmathematik beschrieben werden kann und welche Bedeutung die dabei auftretenden Unterschiede (und Gemeinsamkeiten) für die Ausbildung von Lehrkräften haben.

Beziehung von Schulmathematik und Hochschulmathematik

Bereits Klein geht davon aus, dass es deutliche Unterschiede zwischen dem gibt, was im schulischen Kontext unter „Mathematik“ subsumiert und betrieben wird, und dem, was an Universitäten darunter verstanden und gelehrt wird. Zentrale Unterschiedsdimensionen betreffen unter anderem:

Zielsetzungen

Ein wesentliches Ziel der hochschulmathematischen Lehre ist es, Inhalte und Arbeitsweisen einer Wissenschaft zu vermitteln, deren Kern die Arbeit an einer deduktiv geordneten, axiomatischen Theorie ist – ggf. auch mit Blick auf mögliche Anwendungen. Demgegenüber hat der schulische Unterricht das Ziel, diesen Aspekt der Mathematik allenfalls wissenschaftspropädeutisch zu behandeln (vgl. KMK 1972; 2021). Darüber hinaus zielt er auch auf andere Ziele ab, wie die funktionale Verwendung mathematischer Begriffe und Techniken zur Erschließung der Welt im Sinne eines Beitrags zur Allgemeinbildung oder zur Lösung von lebensweltlichen Problemstellungen im Sinne einer *Mathematical Literacy* (vgl. KMK 2015; Niss, 2003).

Struktur der mathematischen Theorie

Entsprechend baut die Hochschulmathematik auf einem axiomatischen Begriffsfundament auf und wird in der universitären Lehre in weiten Teilen in einem Definition-Satz-Beweis-Stil (z.B. Weber 2004) aus axiomatischen Grundannahmen und Definitionen entwickelt. In der Schulmathematik hingegen werden Begriffe und Zusammenhänge nur punktuell und exemplarisch in derartig systematischer Weise aufeinander aufbauend erarbeitet. Viele Begriffe (z.B. der Bruchzahlbegriff) werden erarbeitet, indem bestimmte Phänomene (hier die Relation zwischen Teil und Ganzen) systematisch untersucht und zunehmend mathematisch beschrieben werden (vgl. Freudenthal 1983).

Trotz dieser weniger systematischen Basis liegt auch der Schulmathematik eine gewisse fachliche Struktur zugrunde (vgl. Dreher et al. 2018). Diese beschreibt, wie fachliche Erkenntnisse innerhalb der Schulmathematik sinnvoll mit vorher erarbeiteten Inhalten verknüpft und ggf. auch mehr oder weniger systematisch begründet werden können. Diese Struktur der Schulmathematik weicht jedoch naturgemäß an vielen Stellen von der der Hochschulmathematik ab. So wird in der Hochschulmathematik beispielsweise die natürliche Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ über die geometrische Reihe definiert $e^x := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$, und Potenzen mit beliebigen Basen ausgehend davon ($a^x := e^{\ln(a) \cdot x}$). In der Schulmathematik geschieht dies dagegen innerhalb einer systematischen Entwicklung des Potenzbegriffs von natürlichen Exponenten über ganzzahlige und rationale Exponenten hin zu reellen Exponenten.

Gewichtung mathematischer Arbeitsweisen

Damit einher geht eine unterschiedliche Gewichtung fachlicher Arbeitsweisen in den beiden Kontexten. Im Hochschulstudium dominiert als zentrale wissenssichernde Arbeitsweise der Mathematik insbesondere das Beweisen (vgl. Thurston 1994) – und in geringerem Umfang das Finden und Formulieren von Vermutungen (vgl. Koedinger 1998) bzw. das Definieren von Begriffen (vgl. Zandieh & Rasmussen 2010). Im schulischen Kontext wird dagegen neben, alternativ oder vorbereitend für diese fachliche Arbeitsweisen ein breiteres Spektrum von wissensgenerierenden Arbeitsweisen verwendet, beispielsweise sogenannte fachdidaktische Beweisformen (vgl. Biehler & Kempen 2016; Jahnke & Ufer 2015; Ufer & Sommerhoff 2019), das lokale Ordnen zum Aufbau lokaler deduktiver Teiltheorien (vgl. Freudenthal 1973), das Einführen von Begriffen anhand von illustrierenden Phänomenen (vgl. Freudenthal 1983) Beispielen und Gegenbeispielen (Begriffsbildung durch Abstraktion, vgl. van Hiele 1959; Vollrath 1984; Weigand 2015) oder das Rechtfertigen von Definitionen (vgl. Jahnke & Krömer 2019). Nicht zuletzt spielen weitere Arbeitsweisen, wie das mathematische Beschreiben und Modellieren von Realsituationen (vgl. Verschaffel et al. 2020) oder der Erwerb von Rechenfertigkeiten (sei es nun mit digitalen Hilfsmitteln oder ohne sie) in der Schulmathematik eine ungleich größere Rolle als in der Hochschulmathematik.

Diese Unterschiede konkretisieren die im Fach selbst liegenden Herausforderungen, denen sich angehende Lehrkräfte nicht nur zu Beginn des Studiums gegenübersehen, wenn sie eine Enkulturation in den für sie neuen Kontext Hochschulmathematik durchlaufen. Auch die häufig beschriebenen Probleme, dieses Wissen beim Übergang von der Hochschule in den Lehrberuf für die Berufspraxis nutzbar zu machen, sind wohl zumindest teilweise auf die beschriebenen fachlichen Unterschiede und Bruchstellen zurückzuführen.

Bestehende Ansätze zur Bearbeitung des Berufsfeldbezugs in fachmathematischen Studienanteilen

Ausgehend von Shulmans (1986) Frage nach der Rolle von fachbezogenem Wissen für die Tätigkeit von Lehrkräften hat sich die Forschung zunächst auf die Konzeptualisierung, den Erwerb und die Wirkung fachdidaktischen Wissens fokussiert (vgl. Baumert et al. 2010; Blömeke & Kaiser 2014; Krauss et al. 2011; Tröbst et al. 2018). Im Rahmen dieser Arbeiten kam bereits die Frage auf, wie mathematisches Fachwissen für Lehrkräfte konzeptualisiert werden soll. Während in COACTIV als Fachwissen ein „tieferes Verständnis der Fachinhalte des Curriculums der Sekundarstufe“ (vgl. Krauss et al. 2008: 237) gefasst wurde, wurde „reines Universitätswissen, das vom Curriculum der Schule losgelöst ist“ (ebd.) davon abgegrenzt und nicht erhoben. Bereits Krauss et al. (2008) werfen die Frage auf, wie sich der Erwerb von universitärem Fachwissen zu einem tieferen Verständnis der

Fachinhalte des schulischen Curriculums verhält. Um dieses Verhältnis genauer zu beschreiben, schlagen Dreher et al. (2018) ein eigenes Fachwissenskonstrukt, schulbezogenes Fachwissen, vor, das sich einerseits auf Wissen über die Struktur der Schulmathematik bezieht, andererseits auf Beziehungen zwischen der Schulmathematik und der universitären Mathematik. Die häufig implizit gesetzte Annahme, dass der Erwerb universitären Fachwissens direkt zur Entwicklung schulbezogenen Fachwissens beiträgt, konnte in einer Längsschnittstudie von Hoth et al. (2018), die sowohl schulbezogenes als auch akademisches Fachwissen erhob, nicht gestützt werden. Es scheint sich also nicht nur um ein unabhängiges Wissenskonstrukt zu handeln (vgl. Heinze et al. 2016), sondern es gibt auch keine Hinweise darauf, dass es sich in einem auf universitäres Fachwissen ausgelegten fachmathematischen Studium ohne weitere Unterstützung mit aufbaut. Den genannten Ansätzen ist gemeinsam, dass sie vorwiegend auf den Inhalt des vermittelten Wissens und die dahinter liegende fachliche Strukturierung des Wissens fokussieren. Vereinzelt werden dabei neben den fachlichen Konzepten auch die fachlichen Arbeitsweisen (im Sinne von prozessbezogenen Kompetenzen) mitgedacht, in denen diese Inhalte genutzt werden sollen (vgl. Wasserman & Stockton 2013).

Damit wird zumeist großer Wert auf eine Verknüpfung hochschulmathematischer Lerninhalte mit passenden Inhalten der Schulmathematik gelegt. Wasserman et al. (2017) schlagen dabei vor, zunächst von Problemstellungen aus dem Berufsfeld auszugehen, diese für eine systematische Analyse der Inhalte der Schulmathematik zu nutzen und daraus Fragestellungen für eine hochschulmathematische Behandlung abzuleiten. Die daraufhin erarbeiteten hochschulmathematischen Inhalte sollen später wieder auf die Struktur der Schulmathematik und dann auf das Ausgangsproblem bezogen werden. Damit verbunden ist die Erwartung, dass das hochschulmathematische Wissen (und das dann damit verbundene schulbezogene Fachwissen) derart situiert erworben wird, dass es in praktischen Anforderungssituationen aktiviert und genutzt wird bzw. werden kann. Entsprechende Ansätze betrachten das fachliche Wissen von Lehrkräften in enger Verknüpfung mit den *professionellen Praktiken* (vgl. Fischer et al. 2022; Grossman 2021), in denen dieses Wissen im Berufsfeld verwendet wird. Sie ordnen beispielsweise diese Nutzungsprozesse danach, auf welche Art (z.B. McCrory et al. 2012; Rowland et al. 2005) und in welchen Situationen (vgl. Lindmeier et al. 2013) das Wissen potentiell angewendet werden soll. Damit rücken neben den spezifischen Inhalten und den fachlichen Arbeitsweisen (z.B. prozessbezogenen Kompetenzen) besonders die Praktiken in den Blick, die die Lehrkräfte im Berufsfeld mit Hilfe des erworbenen Wissens bewältigen sollen. In diesem Sinne sehen Wasserman et al. (2018) die Anwendung hochschulmathematischen Wissens in der Berufspraxis als einen Prozess des Wissenstransfers an, dessen Gelingen je nach Weite des Transfers mehr oder weniger erwartbar erscheint. Diese Weite macht sich daran fest, inwiefern die Situationen, in denen das Wissen angewendet werden soll, dem Erwerbkontext des Wissens ähneln. Es erscheint plausibel, dass hier strukturelle Ähnlichkeiten – also z.B. in Bezug auf die Art und

Weise wie das Wissen genutzt werden muss – erkannt werden müssen, um einen Transfer zu ermöglichen (vgl. Chi & VanLehn 2012), während oberflächliche Ähnlichkeiten (wie z.B. das Vorhandensein einer Schulbuchaufgabe) nicht zwingend ausreichend für einen erfolgreichen Transfer sind. In der Tat vermuten Wasserman et al. (2018) basierend auf Fallstudien, dass zumindest manche Studierende des Lehramts weniger damit rechnen, das erworbene Wissen auf eine neue Art im Berufsfeld zu nutzen, sondern vielmehr erwarten, dass das im Hochschulkontext vermittelte Wissen auf dieselbe Art und Weise im Schulkontext verwendet werden kann, was zu einer Enttäuschung genau dieser Erwartung führen kann.

In ihrem auf einem sprachwissenschaftlichen Ansatz basierenden Literacy-Modell beschreiben Bauer und Hefendehl-Hebeker (2019) vier Stufen, die primär die Tiefe der jeweiligen Fachkenntnisse beschreiben. Sie reichen von Wissen, das für die alltägliche Lebensbewältigung notwendig ist (*everyday literacy*), über technische Fähigkeiten, die in spezifischen Kontexten die Lösung von Problemen und Aufgaben erlaubt (*applied literacy*) hin zu einem systematischen Verständnis von Mathematik innerhalb einer deduktiven mathematischen Theorie (*theoretical literacy*). Als vierte Stufe nennen die Autoren Meta-Wissen über die Mathematik an sich (*reflective literacy*). Letzteres beinhaltet Wissen darüber, was mathematische Erkenntnisse ausmacht, wie die Mathematik zu Erkenntnissen kommt und wie dieser Erkenntnisprozess in der mathematischen Fach-Community reguliert wird. Neu gegenüber den auf den Wissensinhalt bezogenen Ansätzen ist insbesondere der Fokus auf Meta-Wissen zur Mathematik, wie es für Teilbereiche systematischer auch von Fesser und Rach (2022) als Teil wissenschaftspropädeutischer Kompetenzen von Abiturient:innen oder von Sporn et al. (2021) für das Meta-Wissen über das Beweisen beschrieben wurde.

Zusammenfassend lassen sich drei grobe Bereiche unterscheiden, die für Beziehungen zwischen der Hochschulmathematik und der Schulmathematik relevant sein können: (1) Die Gemeinsamkeiten, Unterschiede und Zusammenhänge zwischen den *Inhalten* und fachlichen *Arbeitsweisen* (*Prozesse* in Abb. 1) in beiden Kontexten, (2) die konkreten beruflichen *Praktiken*, in denen das im Studium erworbene Wissen von aktiven Lehrkräften potentiell angewendet werden soll und (3) das *Meta-Wissen* über die Mathematik, das anhand der universitätsmathematischen Inhalte erworben und bestenfalls, ggf. in Verknüpfung mit mathematikdidaktischen Wissen (vgl. Biehler & Hoffmann 2022), für die schulische Arbeit nutzbar gemacht werden soll.

Rahmenmodell für die Konzeption berufsfeldbezogener Lerngelegenheiten in fachmathematischen Veranstaltungen im Lehramtstudium

Ein Ziel der Projekte des Lehrstuhls für Didaktik der Mathematik der LMU zum Berufsfeldbezug in den Fachwissenschaften war es, ein Modell zu entwickeln, das

das Design von berufsfeldbezogenen fachmathematischen Lerngelegenheiten wie Vorlesungsausschnitten, Übungsaktivitäten oder Seminarthemen für Studierende des Lehramts heuristisch unterstützt und fokussiert. Das hier vorgeschlagene Modell (vgl. Abb. 1) ist auf Basis der Erfahrungen aus drei Projekten unter Beteiligung von Mathematikdidaktiker:innen und Mathematiker:innen entstanden. Das Modell stellt drei Fragen in den Vordergrund des Designs: Die Frage nach den mit dem Berufsfeld zu verknüpfenden Wissens-elementen aus der Fachmathematik (*Was?*), die Frage nach möglichen (ggf. exemplarischen) konkreten Situationen und professionellen Praktiken im Berufsfeld, in denen dieses Wissen potenziell zur Anwendung kommen kann (*Wofür?*) und die Frage nach dem Zugang zu diesen Situationen und Praktiken im Rahmen der zu konzipierenden Lerngelegenheit (*Wie?*). Vor allem die erste Frage, nachgeordnet aber auch die beiden anderen Fragen, beeinflussen stark, welche fachmathematischen Inhalte und Arbeitsweisen für das Thematisieren des Berufsfeldbezugs ausgewählt werden (*Auswahl*). Wie die Bearbeitung dieses Berufsfeldbezugs konkret gestaltet wird (*Gestaltung*), hängt dagegen primär von der Antwort auf die letzten beiden Fragen ab.



Abb. 1: Rahmenmodell für die Konzeption berufsfeldbezogener Lerngelegenheiten in fachmathematischen Veranstaltungen im Lehramtstudium

Was?

Wie beschrieben gehen die meisten bestehenden Ansätze zur Bearbeitung des Berufsfeldbezugs für ihre konzeptionellen Überlegungen von den hochschulmathematischen *Inhalten* selbst aus (vgl. Bauer & Hefendehl-Hebeker 2019; Isaev et al. 2022b). Beispielsweise schlagen Wasserman et al. (2017) zwar vor, einem schulischen Bezug als Ausgangspunkt der Lerngelegenheiten zu nutzen, wählen diesen Bezug letztlich jedoch ausgehend von den zu vermittelnden hochschulmathematischen Konzepten aus. In diesen Ansätzen besteht der Berufsfeldbezug aus mehr oder weniger explizit thematisierten Bezügen der (als vorgegeben gesetzten) fachmathematischen Inhalte zur Schulmathematik (bzw. andersherum Bezüge von Konzepten der Schulmathematik zu den fachmathematischen Inhalten; vgl. Dreher et al. 2018).

Es wäre jedoch auch denkbar, dass fachmathematische Lerngelegenheiten mit Berufsfeldbezug gezielt auf ein Verständnis der Struktur der Schulmathematik abzielen (vgl. Dreher et al. 2018). Wird dies mit Arbeitsweisen (*Prozesse*) der Hochschulmathematik angegangen (z.B. Definition von Potenzen mit reellen Exponenten über Approximation durch rationale Exponenten, inklusive Prüfen der Wohldefiniertheit), handelt es sich durchaus um fachmathematische Lerngelegenheiten. Auch wenn hier nicht unbedingt eine hochschulmathematische Theorie weiterentwickelt wird, können doch fachmathematische Arbeitsweisen der akademischen Mathematik, wie das Formulieren von Grundannahmen und Vermutungen sowie rigoroses mathematisches Argumentieren vermittelt, eingeübt und analysiert werden.

Kritisch zu prüfen wäre hier, in welcher Weise und ggf. in welchem Umfang der häufig aus fachmathematischen Studiengängen übernommene hochschulmathematische Inhaltskanon produktiv für eine Nutzung im Berufsfeld, oder in einer weiteren berufsfeldbezogenen Ausbildung von Mathematiklehrkräften sein kann. Eine fachliche Fundierung der Schulmathematik in ihrer mathematischen Struktur erfordert bestimmte, präzise eingeführte Konzepte, wie z.B. einen tragfähigen Grenzwertbegriff. Die Frage, wie sich dies für andere Konzepte des traditionellen Kanons eines (nicht auf ein Lehramt abzielenden) Mathematikstudiums verhält, ist damit nicht abschließend beantwortet.

Neben den jeweils zu vermittelnden mathematischen Konzepten könnte der Bezug zum Berufsfeld auch über die mathematischen Arbeitsweisen (*Prozesse*) vermittelt werden. Hier können Gemeinsamkeiten (z.B. Orientierung an einem Modellierungskreislauf, Nutzung des Permanenzprinzips als Heuristik zum Rechtfertigen von Definitionen, Exploration von Phänomenen durch Simulationen) thematisiert werden, aber auch Unterschiede (z.B. formal-axiomatische Beweise vs. sogenannte „didaktische Beweisformen“; globales vs. lokales Ordnen von Wissen).

Gerade die Unterschiede in den wissensbildenden Prozessen zwischen Hochschulmathematik und Schulmathematik (und ggf. anderen wissenschaftlichen Domänen) kann zu einer produktiven Diskussion der Spezifika der Mathematik führen, und

damit zum wissenschaftspropädeutischen Aufbau von *Meta-Wissen über die Mathematik* (vgl. Fesser & Rach 2022; Sporn et al. 2021). Aber auch typische schulische Arbeitsweisen, wie z.B. das lokale Ordnen von Aussagen und Zusammenhängen in Grundannahmen und darauf aufbauende Sätze, oder das Rechtfertigen von Definitionen (z.B. anhand von Phänomenen, auf die die definierten Begriffe passen sollen) können zu einer tieferen Reflexion der Arbeitsweisen der Mathematik hinter einer Definition-Satz-Beweis-Struktur, die letztendlich ja nur die Mathematik als fertige Theorie, nicht aber deren Entstehungsprozess abbildet, beitragen.

Wofür?

Mindestens genauso wichtig wie die Frage nach den konkreten Inhalten des Berufsfeldbezugs ist die Frage danach, in welchen Situationen und im Rahmen welcher professionellen Praktiken das zu vermittelnde Wissen im Berufsfeld potenziell genutzt werden kann. Wir sehen dies als eine Kernfrage für gelingende Berufsfeldbezüge im Fachstudium Mathematik an. Es erscheint plausibel, dass ein Transfer des erworbenen fachmathematischen Wissens (wo das beabsichtigt ist) in die berufliche Praxis für viele Studierende leichter zu bewältigen ist, wenn sich die Art der Wissensanwendung zwischen Fachstudium und Berufsfeld nicht zu weit unterscheiden.

Wo Bezüge zum Berufsfeld tragfähig und ehrlich thematisiert werden sollen, ist dementsprechend eine klare Vorstellung von den Situationen und Praktiken des Berufsfelds konstitutiv, in denen dieses Wissen verwendet werden soll. Dazu gehört, dass eine entsprechende *prototypische Situation* aus dem Berufsfeld (z.B. Überlegungen während der Unterrichtsplanung dazu, wie stochastische Phänomene zugänglich illustriert werden können) und entsprechende *professionelle Praktiken*, die dann zur Lösung des Problems herangezogen werden (z.B. Design einer Simulation, die mit hinreichender Sicherheit ein zu zeigendes stochastisches Phänomen sichtbar macht), benannt werden können. McCrory et al. (2012) nennen als übergreifende Beispiele für solche Praktiken z.B. das „Dekomprimieren“ (*decompressing/unpacking*) von stark komprimiertem und in sich vernetztem professionellen Wissen in isolierte, im Unterricht kommunizierbare Wissenskomponenten, das „Anpassen“ (*trimming*), mit dem mathematische Inhalte so umstrukturiert werden, dass sie mit den vorhandenen schulmathematischen Möglichkeiten „intellektuell ehrlich“ thematisiert werden können oder das Herstellen von „Brücken“ (*bridging*) zwischen mathematischen Unterrichtsinhalten mit anderen Inhalten, die für die Lernenden zugänglich sind und zu einer besseren Verknüpfung der erlernten Inhalte beitragen können.

Es ist plausibel, dass es im Fachstudium Inhalte geben wird, für die solche Situationen und Praktiken nur schwer vorstellbar sind, z.B. weil die Inhalte weniger im späteren Berufsfeld, sondern primär in weiteren (bestenfalls berufsfeldbezogenen) fachmathematischen Studienanteilen von Relevanz sind. Beispiele könnten Begriffe

wie Injektivität und Surjektivität oder algebraische Strukturen wie Ringe sein, die wesentlich für Argumente im Rahmen mathematischer Theorien sind, sei es nun eine hochschulmathematische Theorie oder eine fachliche Fundierung der Struktur der Schulmathematik. Hier ergeben sich Bezüge zum Berufsfeld allenfalls indirekt über eine spätere Nutzung der Konzepte im Fachstudium.

Wie?

Letztlich stellt sich die Frage danach, was eine wirksame Behandlung der Berufsfeldbezüge innerhalb fachmathematischer Lerngelegenheiten ausmacht. Natürlich können die ausgewählten Situationen aus dem Berufsfeld und professionellen Praktiken im Rahmen einer fachmathematischen Lerngelegenheit allenfalls simuliert und angenähert werden (z.B. Grossman et al. 2009). Damit wird umso wichtiger, inwiefern die simulierte Anforderungssituation ein authentisches Abbild der realen Anforderungen ist (*Authentizität*). Dies ist einerseits von Bedeutung, weil eine authentische Wissensanwendung während der Lerngelegenheit möglicherweise einen Transfer auf spätere reale Anforderungen begünstigen kann. Andererseits gibt es Hinweise darauf, dass die von den Studierenden wahrgenommene Authentizität der Lernsituationen mit deren Interesse an den behandelten Inhalten verknüpft ist (z.B. Kron et al. 2022a, 2022b). Weiterhin muss in der Lernsituation für die Studierenden klar erkennbar sein, *welches* Wissen, auf welche Art und Weise (*Praktik*) und in welcher Anforderungssituation es nutzbar gemacht werden kann (*Klarheit*). Um eine Verknüpfung des Wissens mit den entsprechenden Praktiken zu gewährleisten, erscheint es erforderlich, dass die Studierenden sich aktiv mit der Art und Weise (*Verarbeitung*) auseinandersetzen, wie das Wissen in der jeweiligen Situation angewendet wird. Dies kann beispielsweise durch eigenständiges problem-lösendes Arbeiten gemäß der eingesetzten Praktik (z.B. tragfähiges Fassen einer fachlich zugänglichen Definition von Potenzen mit rationalen Exponenten als Ausgangspunkt für die Reduktion im Unterricht) erreicht werden – sofern die Anforderungen dafür nicht zu komplex sind – oder indem die Studierenden Lösungsbeispiele für die Anforderung auf Verknüpfungen zu den zu fachmathematischen Inhalten oder Arbeitsweisen hin analysieren. Um eine realistische Vorstellung davon zu gewährleisten, dass das vermittelte Wissen auf unterschiedliche berufsfeldbezogene Anforderungen ggf. auf unterschiedliche Art und Weise übertragen werden muss, schlagen wir eine *Reflexion* der Bezüge zwischen den fachmathematischen Inhalten (bzw. Arbeitsweisen oder Meta-Wissen) einerseits, und Situationen sowie Praktiken aus dem Berufsfeld andererseits vor, die über die in der Lerngelegenheit konkret thematisierten Situationen hinausgeht.

Exemplarische Umsetzungen

Projekte „reflect@math.lmu“ und connexercice@math.lmu

In zwei Projekten der ersten Förderphase der „Qualitätsoffensive Lehrerbildung“ wurden in zwei Teilprojekten Berufsfeldbezüge vor allem mit Bezug auf konkrete Inhalte des traditionellen Kanons der Studieneingangsphase Mathematik adressiert. Im Teilprojekt „connexercice@math.lmu“ wurden sogenannte Schnittstellenaufgaben (vgl. Bauer 2013; Isaev et al. 2022a) entwickelt, die eine Verknüpfung von Inhalten der hochschulmathematischen Einführungsveranstaltungen (1. und 2. Semester) mit Inhalten der Schulmathematik anregen sollten. Ausgewählt wurden dabei hochschulmathematische Inhalte, die eine Fundierung von Zusammenhängen der Schulmathematik erlauben (z.B. natürliche Exponentialfunktion). In dieser ersten Projektphase wurden noch keine konkreten Praktiken für die Gestaltung der Lernaufgaben aus berufsfeldbezogener Sichtweise ausgewählt. Eine Anwendung der thematisierten Bezüge wurde primär in der Weise umgesetzt, dass die (angehenden) Lehrkräfte die fachliche Struktur der Inhalte von einem höheren Standpunkt reflektieren. Dabei sollten sie bestenfalls mehr Sicherheit beim Vertreten dieser Inhalte erlangen bzw. entsprechende Bezüge in der Hochschulmathematik im Sinne eines *horizon knowledge* in den Unterricht einbinden können (vgl. Wasserman & Stockton 2013). Rückblickend ist dies in Bezug auf die Authentizität der Anwendung des Wissens kritisch zu sehen, da primär Bezüge zwischen Schul- und Hochschulmathematik hergestellt oder reflektiert werden sollten. Eine authentische Anwendung des Wissens, in ähnlicher Weise wie in typischen Anforderungen aus dem Berufsfeld, erscheint allein dadurch nicht gewährleistet. Die Einbindung der Lernaufgaben in das Studium erfolgte als zusätzliche, freiwillige Übungsaufgaben, die in den Übungsbetrieb der entsprechenden Fachveranstaltungen für das Lehramt eingespeist wurden. Auch wenn die potenziellen Bezüge zwischen Konzepten der Schulmathematik und der Hochschulmathematik sehr explizit angesprochen werden konnten, erwies sich das Sicherstellen einer aktiven Verarbeitung durch die Studierenden auch aufgrund der allgemeinen Belastung durch das Niveau des Fachstudiums naturgemäß als schwierig und als nicht mit allen Studierenden umsetzbar (vgl. Schadl et al. 2019 für eine detailliertere Darstellung).

Im Teilprojekt „reflect@math.lmu.de“ wurden Schnittstellenaufgaben deshalb auch in einer eigenen Seminarveranstaltung eingesetzt, um eine aktivere Bearbeitung der Aufgaben und eine tiefere Diskussion der Berufsfeldbezüge zu erreichen. Die Ergebnisse der Evaluation weisen darauf hin, dass der Erfolg dieser Veranstaltung tatsächlich auch darin bestand, dass Bezüge zwischen Schul- und Hochschulmathematik hergestellt werden konnten. Vielmehr zeigte sich jedoch, dass überhaupt Wissen zur Struktur der Schulmathematik erworben wurde (vgl. ebd.). Insgesamt weisen die Ergebnisse der ersten Projektphase darauf hin, dass ein Explizieren von Bezügen zwischen Hochschulmathematik und Schulmathematik, beispielsweise durch Schnittstellenaufgaben, zwar gelingen kann, diese Explikation allein jedoch

weder ausreicht, um Studierende für die hochschulmathematischen Inhalte (zusätzlich) zu motivieren, noch, um eine Übertragung fachmathematischen Wissens auf schulmathematische Fragestellungen sicherzustellen. Unter dieser Perspektive scheint häufig eher eine „Rechtfertigung“ der hochschulmathematischen Konzepte als Studieninhalte im Vordergrund zu stehen und weniger die Bearbeitung konkret nutzbarer Bezüge zum Berufsfeld.

Projekt „math.meets.school²“

Im Anschlussprojekt der zweiten Phase der „Qualitätsoffensive Lehrerbildung“ lag nun der Fokus auf der expliziten Bearbeitung von Berufsfeldbezügen anhand exemplarischer Praktiken des Berufsfelds. Dazu wurden mehrere Anpassungen am Entwicklungsprozess vorgenommen: (1) Der Fokus wurde auf fortgeschrittene fachmathematische Lehrveranstaltungen gelegt, in diesem Fall auf fachmathematische Seminare, um eine günstigere Basis hochschulmathematischen Wissens für die Berufsfeldbezüge sicherzustellen. Dies ermöglichte es auch, vom üblichen Kanon eines fachmathematischen Studiums etwas abzuweichen und die fachlichen Inhalte (*Was?*) ausgehend vom Berufsfeldbezug (*Wofür?*) zu wählen. So konnten die (2) Seminarkonzepte mit einem spezifischen Fokus auf exemplarische Praktiken des Berufsfelds angelegt werden (*Wofür?*). Konkret wurden dabei Anforderungen zur fachlichen Nutzung digitaler Werkzeuge im Mathematikunterricht bzw. bei der Erstellung mathematischer Unterrichtsmaterialien ausgewählt. (3) Bei der Entwicklung der Seminarkonzepte wurde eine Kooperation zwischen jeweils einer Person aus der Mathematik und einer Person aus der Mathematikdidaktik initiiert, um eine kontinuierliche Abstimmung von fachlichen Inhalten (*Was?*) und illustrierender beruflicher Situation bzw. Praktik (*Wofür?*) zu ermöglichen.

Beispiel Seminarkonzept „Funktionen und Modellieren“

Das Seminarkonzept „Funktionen und Modellieren“ geht von der Problematik aus, dass ein realitätsbezogener Unterricht zu typischen Funktionstypen (z.B. lineare Funktionen, Potenzfunktionen, Exponentialfunktionen etc.) auf authentische Beispiele für entsprechende funktionale Zusammenhänge in exemplarischen Kontexten angewiesen ist. In Bezug auf die Frage „*Wofür?*“ wurde damit auf Situationen in der Unterrichtsplanung fokussiert und als Praktik speziell auf die Suche nach und Auswahl von realitätsbezogenen Kontexten für einen bestimmten Funktionstyp.

Inhaltlich (*Was?*) wurden zunächst Techniken des datenbasierten Modellierens mit Funktionen ausgewählt und für das Seminar aufbereitet. Mit Bezug zur Struktur der Schulmathematik wurde weiterhin eine Fundierung der charakterisierenden Eigenschaften von Funktionstypen (vgl. z.B. Abb. 2 für proportionale Funktionen) als Bereich ausgewählt, der mit hochschulmathematischen Arbeitsweisen systematisch bearbeitet werden sollte. Dies legte auch die Grundlage für spätere strukturorientierte Modellierungsprozesse, also die begründete Auswahl eines Funktionstyps

für einen gegebenen Kontext. Letztlich wurden technische Fähigkeiten zum Umgang mit digitalen Werkzeugen für das datenbasierte Modellieren anhand von Excel, GeoGebra und ausgewählten Packages der Statistiksoftware R als Ziel der Veranstaltung ausgewählt.

1. Satz:

Für jede Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind äquivalent:

1. f ist stetig und für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x) + f(y) = f(x + y)$.
2. f ist stetig und für alle $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$ gilt: $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$.
3. Für alle $r, x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$.
4. Für alle $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt: $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(y)}{y}$ und $f(0) = 0$.
5. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $y \neq 0$ gilt: $\frac{f(x)}{f(y)} = \frac{x}{y}$ und $f(0) = 0$.
6. Es gibt ein $k \in \mathbb{R}$, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x) = k \cdot x$.

In diesem Fall nennt man f *proportional*.

Abb. 2: Charakterisierende Eigenschaften von Proportionalitäten

Das Seminar wurde gemeinsam mit einem Kollegen aus dem Bereich Statistik gestaltet. Bezüglich der Frage „Wie?“ wurden die Studierendenvorträge im Seminar jeweils so angelegt, dass neben der Erarbeitung der fachlichen Inhalte und Arbeitsweisen in Vorträgen auch eine Anwendung der erworbenen Kenntnisse zur datenbasierten Modellierung auf reale Datensätze vorgesehen war (*Verarbeitung*). *Authentizität* wurde angestrebt, indem auf schulisch zugängliche Funktionstypen und Kontexte geachtet wurde. Der angestrebte Transfer des erworbenen Wissens auf Tätigkeiten der Unterrichtsplanung, wurde im Seminar wiederholt thematisiert. Eine explizite *Reflexion* der Berufsfeldbezüge wurde in diesem Seminarkonzept zunächst nur am Ende des Seminars, als Teil eines Seminarportfolios eingefordert.

Beispiel Seminarkonzept „Zufall und Simulieren“

Das Seminarkonzept „Zufall und Simulieren“ geht von der Problematik aus, stochastische Zusammenhänge im Unterricht klar erfahrbar zu machen und stellt dabei Simulationen stochastischer Phänomene in den Vordergrund. Simulationen erlauben hier einen ersten Zugang zur mathematischen Situation, der als Basis für eine systematischere Bearbeitung dienen kann. In Bezug auf die Frage „Wofür?“ stand damit die Erstellung und Nutzung von Simulationen für stochastische Phänomene für den Unterricht im Vordergrund.

Inhaltlich (*Was?*) wurde die schulmathematische Fundierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs über das empirische Gesetz der Stabilisierung relativer Häufigkeiten als Einstieg in das Thema ausgewählt, um den Anschluss zwischen der axiomatischen

Fundierung von Wahrscheinlichkeit in der Hochschulmathematik und der Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs über wiederholte (unabhängige und gleichverteilte) Zufallsexperimente in der Schulmathematik herzustellen. Weiter wurden stochastische Phänomene ausgewählt, die sowohl mittels Simulationen untersucht, deren Eigenschaften aber auch mathematisch formuliert und bewiesen werden sollten. Am Beispiel von Irrfahrten wurde der zentrale Grenzwertsatz in seiner Bedeutung detailliert analysiert und anhand von Polya-Urnen wurden Grenzen des Gesetzes der großen Zahlen verdeutlicht. Weiterhin wurden Zufallsgraphen gewählt, weil diese reichhaltige stochastische Phänomene liefern, und auch als Modelle der Realität (z.B. Kleine-Welt-Phänomen in sozialen Netzwerken) dienen können. Bezüglich der Prozesse und des Meta-Wissens über die Mathematik stand vor allem die Rolle von Simulationen und explorativem Arbeiten für die mathematische Erkenntnisgewinnung im Schul- und Hochschulkontext im Vordergrund.

Das Seminar wurde gemeinsam mit einem Kollegen aus dem Bereich Wahrscheinlichkeitstheorie gestaltet. Bezüglich der Frage „Wie?“ beinhalteten die Studierenden-vorträge in der Regel mindestens einen Auftrag zur expliziten Bearbeitung eines Praxisbezugs, entweder indem an einer Fundierung von schulmathematischen Zusammenhängen gearbeitet wurde oder indem die Studierenden selbst Simulationen zu den entsprechenden Zufallsphänomenen erstellten und untersuchten.

Zusammenfassung und Ausblick

Ziel der Projekte zum Berufsfeldbezug in den Fachwissenschaften Mathematik war es, Möglichkeiten und Ansatzpunkte aufzuzeigen, um nutzbare Anknüpfungspunkte zwischen dem späteren Berufsfeld und den hochschulmathematischen Studieninhalten aufzuzeigen. Aus Sicht der Projektbeteiligten und aufbauend auf den Projekterfahrungen scheinen bei der Gestaltung von berufsfeldbezogenen Lerngelegenheiten folgende Aspekte besonders relevant:

(i) Bezüge zwischen der Hochschulmathematik und dem schulischen Mathematikunterricht sind durchaus in großer Breite denkbar (vgl. Bauer 2013; Bauer & Hefendehl-Hebeker 2019; Isaev et al. 2022b; Schadl et al. 2019; Weber & Lindmeier 2022). Allein diese aufzuzeigen reicht für eine wirksame, berufsfeldbezogene Lehre jedoch nicht aus (vgl. Schadl et al. 2019). Soll das erworbene Wissen für das spätere Berufsfeld wirklich nutzbar gemacht werden, sollte wenigstens eine Vorstellung von konkreten, exemplarischen Situationen und Praktiken im Berufsfeld vorliegen, in der das Wissen in ähnlicher Weise genutzt werden kann (vgl. Wasserman et al. 2018). Diese authentischen Situationen und Praktiken zu identifizieren stellt eine wesentliche Herausforderung bei der Gestaltung von Berufsfeldbezügen dar.

(ii) Der Berufsfeldbezug eines konkreten fachmathematischen Studieninhalts muss sich nicht zwingend an den jeweils thematisierten mathematischen Konzepten festmachen. Gerade aufgrund der häufig sehr unterschiedlichen fachlichen Struktur

von Schul- und Hochschulmathematik laufen solche Bezüge Gefahr, eher die Unterschiede als die Gemeinsamkeiten zwischen den beiden Bereichen zu betonen und tragfähige Berufsfeldbezüge eher zu verschleiern als zu explizieren. Alternativ scheint uns der Fokus auf die jeweils genutzten mathematischen Prozesse der Erkenntnisgewinnung und -systematisierung und das damit verbundene Meta-Wissen über die Mathematik ein tragfähiger Zugang zur Vermittlung und Gestaltung von Berufsfeldbezügen zu sein.

(iii) Nicht alle hochschulmathematischen Studieninhalte eignen sich gleichermaßen für einen expliziten Bezug zum Berufsfeld. Unter der hier vorgeschlagenen Perspektive wäre zu prüfen, inwiefern Studieninhalte ggf. indirekt zur späteren Durchdringung expliziter Berufsfeldbezüge hilfreich und notwendig sind. Sollten sich weder direkte noch indirekte Berufsfeldbezüge für einen Studieninhalt identifizieren lassen – sei es in Bezug auf die konkreten hochschulmathematischen Konzepte, den daran thematisierten Arbeitsweisen, oder das in der Auseinandersetzung mit ihnen erwerbbarere Meta-Wissen zur Mathematik – so wären andere, konkrete Bezüge nötig um die Relevanz dieser Inhalte für das Lehramtsstudium zu rechtfertigen und um damit Hinweise für eine Gestaltung von Lerngelegenheiten zu geben, die diese Bezüge für die Lernenden nutzbar machen. Hier ist auch aufgrund der beschränkten Zeit für die fachmathematische Ausbildung weitere Arbeit an der Reflexion der fachmathematischen Studieninhalte für die verschiedenen Studiengänge der Lehrkräftebildung nötig.

(iv) Damit deutet sich an, dass der Berufsfeldbezug in fachmathematischen Studienanteilen eine Herausforderung ist, die wahrscheinlich nicht alleine von den Kolleg:innen der Fachmathematik bewältigt werden kann. Wissen über die Struktur der Schulmathematik und das Berufsfeld, inklusive den nicht-fachmathematischen Anteilen der Lehrkräftebildung, kann beispielsweise von Kolleg:innen der Fachdidaktik eingebracht werden. Das gemeinsame Entwickeln von Seminarkonzepten ist nur eine mögliche Kooperationsform für die Bearbeitung dieser Bezüge. Jede solche Kooperation erfordert jedoch von beiden Seiten eine gewisse Offenheit und gegenseitiges Vertrauen in gemeinsame Ziele und Werte für die Lehrkräftebildung. Auf Seiten der Fachdidaktiken ist weiterhin zu bedenken, inwiefern der geringe Studienumfang fachdidaktischer Veranstaltungen und die häufig spärliche Ausstattung eine Gestaltung und Umsetzung der dargestellten Seminarangebote und Entwicklungskooperationen in der Breite erlaubt.

Zusammenfassend liefern die vorgestellten Projekte zunächst konkrete Materialien für eine punktuelle Umsetzung des Berufsfeldbezugs. Diese sind auf Nachfrage bei den Autoren erhältlich. Einschränkend muss angemerkt werden, dass die entwickelten Konzepte Berufsfeldbezüge allenfalls punktuell und exemplarisch in das Studium integrieren. Das daraus hervorgegangene Rahmenmodell dient darüber hinaus als Heuristik, um tragfähige Berufsfeldbezüge auch an anderen Stellen des fachmathematischen Studiums für Studierende des Lehramts umzusetzen.

Literaturangaben

- Bauer, Thomas (2013). Schnittstellen bearbeiten in Schnittstellenaufgaben. In Ableitinger, Christoph; Kramer, Jürg & Prediger, Susanne (Hrsg.): *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung*. Wiesbaden: Springer Spektrum, 39-56.
- Bauer, Thomas & Hefendehl-Hebeker, Lisa (2019). *Mathematikstudium für das Lehramt an Gymnasien. Anforderungen, Ziele und Ansätze zur Gestaltung*. Wiesbaden: Springer Fachmedien.
- Baumert, Jürgen; Kunter, Mareike; Blum, Werner; Brunner, Martin; Voss, Thamar; Jordan, Alexander; Klusmann, Uta; Krauss, Stefan; Neubrand, Michael & Tsai, Yi-Miau (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American educational research journal*, 47.1, 133-180.
- Biehler, Rolf & Hoffmann, Max (2022). Fachwissen als Grundlage fachdidaktischer Urteilskompetenz – Beispiele für die Herstellung konzeptueller Bezüge zwischen fachwissenschaftlicher und fachdidaktischer Lehre im gymnasialen Lehramtsstudium. In Isaev, Viktor; Eichler, Andreas & Loose, Frank (Hrsg.): *Professionsorientierte Fachwissenschaft*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum, 49-72.
- Biehler, Rolf & Kempen, Leander (2016). Didaktisch orientierte Beweiskonzepte – Eine Analyse zur mathematikdidaktischen Ideenentwicklung. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37.1, 141-179.
- Blömeke, Sigrid & Kaiser, Gabriele (2014). Theoretical framework, study design and main results of TEDS-M. In Blömeke, Sigrid; Feng-Jui, Hsieh; Kaiser, Gabriele & Schmidt, William H. (Hrsg.): *International perspectives on teacher knowledge, beliefs and opportunities to learn*. Dordrecht: Springer, 19-47.
- Brunner, Martin; Kunter, Mareike; Krauss, Stefan; Baumert, Jürgen; Blum, Werner; Dubberke, Thamar; Jordan, Alexander; Klusmann, Uta; Tsai, Yi-Miau & Neubrand, Michael (2006). Welche Zusammenhänge bestehen zwischen dem fachspezifischen Professionswissen von Mathematiklehrkräften und ihrer Ausbildung sowie beruflichen Fortbildung? *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, 9.4, 521-544.
- Chi, Michelene TH. & VanLehn, Kurt A. (2012). Seeing deep structure from the interactions of surface features. *Educational Psychologist*, 47.3, 177-188.
- Dreher, Anika; Lindmeier, Anke; Heinze, Aiso & Niemand, Carolin (2018). What kind of content knowledge do secondary mathematics teachers need? *Journal für Mathematik-Didaktik*, 39.2, 319-341.
- Fesser, Patrick & Rach, Stefanie (2022). Wissenschaftspropädeutik in der gymnasialen Oberstufe: theoretische und empirische Zugänge sowie erste Befunde zu meta-wissenschaftlichem Wissen über Mathematik. In Rolfes, Tobias; Rach, Stefanie; Ufer, Stefan, & Heinze, Aiso (Hrsg.): *Das Fach Mathematik in der gymnasialen Oberstufe*. Münster: Waxmann, 263-268.
- Fischer, Frank; Bauer, Elisabeth; Seidel, Tina; Schmidmaier, Ralf; Radkowitzsch, Anika; Neuhaus, Birgit J.; Hofer, Sarah. I.; Sommerhoff, Daniel; Ufer, Stefan & Kuhn, Jochen (2022). Representational scaffolding in digital simulations—learning professional practices in higher education. *Information and Learning Sciences* (ahead-of-print).
- Freudenthal, Hans (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Stuttgart: Klett.
- Freudenthal, Hans (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. México: CINVESTAV.
- Grossman, Pam (2021). *Teaching core practices in teacher education*. Cambridge: Harvard Education Press.
- Grossman, Pam; Compton, Christa; Igra, Danielle; Ronfeldt, Matthew; Shahan, Emily & Williamson, Peter W. (2009). Teaching practice: A cross-professional perspective. *The Teachers College Record*, 111.9, 2055-2100.

- Heinze, Aiso; Dreher, Anika; Lindmeier, Anke & Niemand, Carolin (2016). Akademisches versus schulbezogenes Fachwissen – ein differenzierteres Modell des fachspezifischen Professionswissens von angehenden Mathematiklehrkräften der Sekundarstufe. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, 19.2, 329-349.
- Hoth, Jessica; Jeschke, Colin; Dreher, Anika; Lindmeier, Anke & Heinze, Aiso (2018). Entwicklung des professionellen Wissens angehender Mathematiklehrkräfte während des Studiums. In: Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht*. Münster: WTM-Verlag.
- Isaev, Viktor; Eichler, Andreas & Bauer, Thomas (2022a). Wirkung von Schnittstellenaufgaben auf die Überzeugungen von Lehramtsstudierenden zur doppelten Diskontinuität. In Isaev, Viktor; Eichler, Andreas & Loose, Frank (Hrsg.): *Professionsorientierte Fachwissenschaft*. Berlin, Heidelberg: Springer, 139-154.
- Isaev, Viktor; Eichler, Andreas & Loose, Frank (2022b). *Professionsorientierte Fachwissenschaft. Kohärenzstiftende Lerngelegenheiten für das Lehramtsstudium Mathematik*. Berlin, Heidelberg: Springer.
- Jahnke, Hans Niels & Krömer, Ralf (2019). Rechtfertigen in der Mathematik und im Mathematikunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 41, 459-484, 1-26
- Jahnke, Hans Niels & Ufer, Stefan (2015). Argumentieren und Beweisen. In Bruder, Regina; Hefendehl-Hebeker, Lisa; Schmidt-Thieme, Barbara & Weigand, Hans-Georg (Hrsg.): *Handbuch der Mathematikdidaktik*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum, 331-355.
- Klein, Felix (1908). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Teil I: Arithmetik, Algebra, Analysis*. Teubner.
- KMK – Ständige Kultusministerkonferenz der Länder (1972). *Vereinbarung zur Neugestaltung der gymnasialen Oberstufe in der Sekundarstufe II: mit einem einführenden Bericht, am 7. Juli 1972 von der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland beschlossen*. Online: <https://www.kmk.org/fileadmin/pdf/PresseUndAktuelles/2000/Vereinb-z-Gestalt-d-gymOb-i-d-SekII.pdf>, letzter Zugriff 13. Januar 2023. Luchterhand.
- KMK – Ständige Kultusministerkonferenz der Länder (2008). *Ländergemeinsame inhaltliche Anforderungen für die Fachwissenschaften und Fachdidaktiken in der Lehrerbildung (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 16.10.2008 i. d. F. vom 16.05.2019)*. Online: https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2008/2008_10_16-Fachprofile-Lehrerbildung.pdf, letzter Zugriff 23. November 2022.
- KMK – Ständige Kultusministerkonferenz der Länder (2015). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Beschluss vom 18.10.2021*. Online: https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf, letzter Zugriff 13. Januar 2023.
- KMK – Ständige Kultusministerkonferenz der Länder (2021). *Vereinbarung zur Gestaltung der gymnasialen Oberstufe und der Abiturprüfung; Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 07.07.1972 i. d. F. vom 18.02.2021*. Online: https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/1972/1972_07_07-VB-gymnasiale-Oberstufe-Abiturpruefung.pdf, letzter Zugriff 23. November 2022.
- Koedinger, Kenneth R. (1998). Conjecturing and argumentation in high-school geometry students. In Lehrer, Richard & Chazan, Daniel (Hrsg.): *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space*. New York: Routledge, Lawrence Erlbaum Association, 319-347.
- Krauss, Stefan; Blum, Werner; Brunner, Martin; Neubrand, Michael; Baumert, Jürgen; Kunter, Mareike; Besser, Michael & Elsner, Jürgen (2011). Konzeptualisierung und Testkonstruktion zum fachbezogenen Professionswissen von Mathematiklehrkräften. In Kunter, Mareike; Baumert, Jürgen & Blum, Werner (Hrsg.): *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV*, Münster: Waxmann, 135-161.

- Krauss, Stefan; Neubrand, Michael; Blum, Werner; Baumert, Jürgen; Brunner, Martin; Kunter, Mareike & Jordan, Alexander (2008). Die Untersuchung des professionellen Wissens deutscher Mathematiklehrerinnen und-lehrer im Rahmen der COACTIV-Studie. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 29.3, 233-258.
- Kron, Stephanie; Sommerhoff, Daniel; Achtner, Maike; Stürmer, Kathleen; Wecker, Christof; Siebeck, Matthias & Ufer, Stefan (2022a). Cognitive and motivational person characteristics as predictors of diagnostic performance: Combined effects on pre-service teachers' diagnostic task selection and accuracy. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 43.1, 135-172.
- Kron, Stephanie; Sommerhoff, Daniel; Achtner, Maike; Stürmer, Kathleen; Wecker, Christof; Siebeck, Matthias & Ufer, Stefan (2022b). Simulation-based learning environments: Do they affect learners' relevant interests'. In C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez, & N. Planas (Hrsg.): *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Bd. 3)*, Alicante: PME, 67-74.
- Lindmeier, Anke M.; Heinze, Aiso & Reiss, Kristina (2013). Eine Machbarkeitsstudie zur Operationalisierung aktionsbezogener Kompetenz von Mathematiklehrkräften mit videobasierten Maßen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 34.1, 99-119.
- McCrary, Raven; Floden, Robert; Ferrini-Mundy, Joan; Reckase, Mark D. & Senk, Sharon L. (2012). Knowledge of algebra for teaching: A framework of knowledge and practices. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43.5, 584-615.
- Neuhaus, Silke & Rach, Stefanie (2021). Hochschulmathematik in einem Lehramtsstudium: Wie begründen Studierende deren Relevanz und wie kann die Wahrnehmung der Relevanz gefördert werden? In Biehler, Rolf; Eichler, Andreas; Hochmuth, Reinhard; Rach, Stefanie & Schaper, Niclas (Hrsg.): *Lehrinnovationen in der Hochschulmathematik*. Berlin, Heidelberg: Springer, 205-226.
- Niss, Mogens (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. 3rd Mediterranean conference on mathematical education, 115-124.
- Rach, Stefanie (2019). Lehramtsstudierende im Fach Mathematik – Wie hilft uns die Analyse von Lernvoraussetzungen für eine kohärente Lehrerbildung? In Hellmann, Katharina; Kreutz, Jessica; Schwichow, Martin & Zaki, Katja (Hrsg.): *Kohärenz in der Lehrerbildung*. Wiesbaden: Springer, 69-84.
- Rowland, Tim; Huckstep, Peter & Thwaites, Anne (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of mathematics teacher education*, 8.3, 255-281.
- Schadl, Constanz; Ufer, Stefan. & Rachel, Alexander (2019). Stärkung des Berufsfeldbezugs im Lehramtsstudium Mathematik. *Mitteilungen der GDM*, 107, 47-51.
- Shulman, Lee S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15, 4-14.
- Sporn, Femke; Sommerhoff, Daniel & Heinze, Aiso (2021). Beginning university mathematics students' proof understanding. In: Inprasitha, Maitree; Changsri, Narumon & Boonsena, Nisakorn (Hrsg.): *Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Bd. 4)*, Khon Kaen: PME, 105-112.
- Thurston, William P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 30.2, 161-177.
- Tröbst, Steffen; Kleickmann, Thilo; Heinze, Aiso; Bernholt, Andrea; Rink, Roland & Kunter, Mareike (2018). Teacher knowledge experiment: Testing mechanisms underlying the formation of preservice elementary school teachers' pedagogical content knowledge concerning fractions and fractional arithmetic. *Journal of Educational Psychology*, 110.8, 1049-1065.
- Ufer, Stefan & Sommerhoff, Daniel (2019). Hauptsache überzeugt? Was kann Argumentieren (und Begründen und Beweisen) für den Mathematikunterricht leisten - und wie? In: von Schroeders, Nicolai (Hrsg.): *MaMut Materialien für den Mathematikunterricht - Argumentieren, Begründen, Beweisen*. Hildesheim: Franzbecker, 7-34.

- van Hiele, Pierre M. (1959). The child's thought and geometry. *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele*, 243–252.
- Verschaffel, Lieven; Schukajlow, Stanislaw; Star, Jon & Van Dooren, Wim (2020). Word problems in mathematics education: A survey. *ZDM*, 52.1, 1-16.
- Vollrath, Hans-Joachim (1984). *Methodik des Begriffslehrens*. Stuttgart: Klett.
- Wasserman, Nicholas H. & Stockton, Julianna Connelly. (2013). Horizon content knowledge in the work of teaching: A focus on planning. *For the Learning of Mathematics*, 33.3, 20-22.
- Wasserman, Nicholas H.; Weber, Keith; Villanueva, Matthew & Mejia-Ramos, Juan Pablo (2018). Mathematics teachers' views about the limited utility of real analysis: A transport model hypothesis. *The Journal of Mathematical Behavior*, 50, 74-89.
- Wasserman, Nicholas H.; Fukawa-Connelly, Timothy; Villanueva, Matthew; Mejia-Ramos, Juan Pablo & Weber, Keith (2017). Making real analysis relevant to secondary teachers: Building up from and stepping down to practice. *Primus*, 27.6, 559-578.
- Weber, Birke-Johanna & Lindmeier, Anke (2022). Typisierung von Aufgaben zur Verbindung zwischen schulischer und akademischer Mathematik. In Isaev, Viktor; Eichler, Andreas & Loose, Frank (Hrsg.): *Professionsorientierte Fachwissenschaft*. Berlin, Heidelberg: Springer, 95-121.
- Weber, Keith (2004). Traditional instruction in advanced mathematics courses: A case study of one professor's lectures and proofs in an introductory real analysis course. *The Journal of Mathematical Behavior*, 23.2, 115-133.
- Weigand, Hans-Georg (2015). Begriffsbildung. In Bruder, Regina; Hefendehl-Hebeker, Lisa; Schmidt-Thieme, Barbara & Weigand, Hans-Georg (Hrsg.): *Handbuch der Mathematikdidaktik*. Berlin, Heidelberg: Springer, 255-278.
- Zandieh, Michelle & Rasmussen, Chris (2010). Defining as a mathematical activity: A framework for characterizing progress from informal to more formal ways of reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, 29.2, 57–75.
- Zazkis, Rina & Leikin, Roza (2010). Advanced mathematical knowledge in teaching practice: Perceptions of secondary mathematics teachers. *Mathematical Thinking and Learning*, 12.4, 263-281.

Über die Autor:innen

Matthias Mohr ist wissenschaftlicher Mitarbeiter im Bereich Mathematikdidaktik in den Projekten der „Qualitätsoffensive Lehrerbildung“ an der LMU München.

Korrespondenzadresse: mohr@math.lmu.de

Markus Heydenreich ist Professor für Angewandte Mathematik an der LMU München. Er lehrt und forscht in Wahrscheinlichkeitstheorie.

Korrespondenzadresse: heydenreich@math.lmu.de

Georg Schollmeyer ist Postdoktorand am Institut für Statistik der LMU München.

Korrespondenzadresse: georg.schollmeyer@stat.uni-muenchen.de

Stefan Ufer ist Leiter des Lehrstuhls für Didaktik der Mathematik an der LMU München. Er leitete die Projekte zum Berufsfeldbezug in der Fachwissenschaft Mathematik im Rahmen der „Qualitätsoffensive Lehrerbildung“ an der LMU München.

Korrespondenzadresse: ufer@math.lmu.de

Über das Projekt „math.meets.school²“

Das Projekt „math.meets.school²“ wird im Rahmen von „Lehrerbildung@LMU“ in der „Qualitätsoffensive Lehrerbildung“ an der Ludwig-Maximilians-Universität München vom Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik in Kooperation mit Kolleg:innen aus den Instituten für Mathematik und Statistik realisiert. Wesentliches Ziel des Projekts und zweier Vorgängerprojekte war es, den Berufsfeldbezug in den fachwissenschaftlichen Lehrveranstaltungen im Lehramtsstudium Mathematik zu verbessern.

Projektwebseite:

www.ed.math.lmu.de/m/~didaktik/index.php?data=forschung/projekte/mms2



Das Projekt Lehrerbildung@LMU wird im Rahmen der gemeinsamen „Qualitätsoffensive Lehrerbildung“ von Bund und Ländern aus Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung gefördert.